Universidad Simón Bolívar.
Matemáticas II (MA-1112).
Enero – marzo 2013.
christianlaya@hotmail.com ; @ChristianLaya

Tercer examen parcial (40%)
Tipo C (7-8)

1. *Encuentre* $y'(\ln(2))$ *para:*

$$y = \ln\left|\frac{-1 + senh(x)}{2 + \cosh(x)}\right|$$

Solución:

Tenemos que:

$$y = \ln\left|\frac{-1 + senh(x)}{2 + \cosh(x)}\right| \Rightarrow e^y = \left|\frac{-1 + senh(x)}{2 + \cosh(x)}\right|$$

Sin embargo, sabemos que $2 + \cosh(x)$ *es siempre positivo, por ende:*

$$e^y = \frac{|-1 + senh(x)|}{2 + \cosh(x)}$$

Ahora bien, podemos elevar ambos miembros de la ecuación para quitar el valor absoluto:

$$\Rightarrow \left(e^{y^2}\right) = \left(\frac{-1 + senh(x)}{2 + \cosh(x)}\right)^2 \Rightarrow e^{2y} = \left(\frac{-1 + senh(x)}{2 + \cosh(x)}\right)^2$$

Procedemos a derivar:

$$(e^{2y})(2y') = 2\left(\frac{-1 + senh(x)}{2 + \cosh(x)}\right)\left(\frac{\cosh(x)\,(2 + \cosh(x)) - senh(x)\big(-1 + senh(x)\big)}{(2 + \cosh(x))^2}\right)$$

$$\Rightarrow (e^{2y})y' = \left(\frac{-1 + senh(x)}{2 + \cosh(x)}\right)\left(\frac{\cosh(x)\,(2 + \cosh(x)) - senh(x)\big(-1 + senh(x)\big)}{(2 + \cosh(x))^2}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{1}{e^{2y}}\right)\left(\frac{-1 + senh(x)}{2 + \cosh(x)}\right)\left(\frac{\cosh(x)\,(2 + \cosh(x)) - senh(x)\big(-1 + senh(x)\big)}{(2 + \cosh(x))^2}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{1}{e^{2\ln\left|\frac{-1+senh(x)}{2+\cosh(x)}\right|}}\right)\left(\frac{-1 + senh(x)}{2 + \cosh(x)}\right)\left(\frac{\cosh(x)\,(2 + \cosh(x)) - senh(x)\big(-1 + senh(x)\big)}{(2 + \cosh(x))^2}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{2 + \cosh(x)}{-1 + senh(x)}\right)^2\left(\frac{-1 + senh(x)}{2 + \cosh(x)}\right)\left(\frac{\cosh(x)\,(2 + \cosh(x)) - senh(x)\big(-1 + senh(x)\big)}{(2 + \cosh(x))^2}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cosh(x)\,(2+\cosh(x)) - senh(x)\big(-1+senh(x)\big)}{(2+\cosh(x))(-1+senh(x))}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2\cosh(x) + senh(x)}{(2+\cosh(x))\big(-1+senh(x)\big)}$$

De hecho, la expresión puede ser reescrita como:

$$y' = \frac{2e^{x}(3e^{2x}+1)}{(-2e^{x}+e^{2x}-1)(4e^{x}+e^{2x}+1)}$$

Evaluamos:

$$y'(\ln(2)) = \frac{2e^{\ln(2)}(3\mathrm{e}^{2\ln(2)}+1)}{(-2e^{\ln(2)}+e^{2\ln(2)}-1)(4e^{\ln(2)}+e^{2\ln(2)}+1)} = \frac{2(2)(3(4)+1)}{(-2(2)+4-1)(4(2)+4+1)}$$

$$= \frac{4(13)}{(-1)(13)} = -4$$

2. *Demuestre que si $0 < a < 1$ entonces a^{x} es decreciente en todo $\mathbb{R}$.*

<u>Solución</u>:

Sean x_1 y x_2 dos números reales cualesquiera tales que $x_1 > x_2$. Si se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$, entonces, la función es decreciente.

Procedemos a demostrar:

$$f(x) = a^{x}, \qquad f(x_1) = a^{x_1}, \qquad f(x_2) = a^{x_2}$$

Entonces, queremos demostrar que si $f(x_1) > f(x_2) \Longrightarrow x_1 > x_2$. Tenemos que:

$$f(x_1) > f(x_2) \Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \Longrightarrow \ln(a^{x_1}) > \ln(a^{x_2}) \Longrightarrow x_1 \ln(a) > x_2 \ln(a) \Longrightarrow x_1 > x_2$$

Probamos que la función es decreciente para cualquier real, es decir:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Ahora, debemos probar que la función es decreciente para cualquier valor real tal que $0 < a < 1$. Como sabemos que a^{x} es decreciente. Sean: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2, \qquad a^{0} > a^{1} \Longrightarrow 1 > a \Longrightarrow a < 1$$

3. *Calcule el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 0^{+}} (2^{x} + x)^{2/x}$$

<u>Solución</u>:

Si evaluamos $x = 0$ obtenemos una indeterminación del tipo 1^{∞}. Tenemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} (2^x + x)^{2/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left((2^x+x)^{2/x}\right)} = e^{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x}\right)\ln(2^x+x)}$$

Resolvemos el límite por separado:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2}{x}\right)\ln(2^x + x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln(2^x + x)}{x}$$

Si evaluamos $x = 0$ obtenemos una indeterminación del tipo 0/0. Aplicamos L' Hopital:

$$= \lim_{x\to 0^+} 2\left(\frac{1}{2^x + x}\right)(2^x\ln(2) + 1) = 2\left(\frac{1}{1}\right)(2^0\ln(2) + 1) = 2\ln(2) + 2 = \ln(4) + 2$$

Finalmente, decimos que:

$$\lim_{x\to 0^+} (2^x + x)^{2/x} = e^{\ln(4)+2} = e^{\ln(4)}e^2 = 4e^2$$

4. *Calcule el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x) - 1}{1 - \cos(x)}$$

<u>Solución</u>:

Si evaluamos $x = 0$ tenemos una indeterminación del tipo 0/0. Aplicamos L' Hopital hasta levantar la indeterminación:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x) - 1}{1 - \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{senh(x)}{sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

5. *Calcule, si es posible:*

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^{4/5}}$$

<u>Solución</u>:

Sea la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^{4/5}}, \qquad Domf = \{(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)\}$$

Entonces:

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^{4/5}} = \int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^{4/5}} + \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{4/5}} = \lim_{b\to 2^-} \int_1^b \frac{dx}{(x-2)^{4/5}} + \lim_{b\to 2^+} \int_b^3 \frac{dx}{(x-2)^{4/5}}$$

Resolvemos la indefinida:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^{4/5}}\ (u = x-2 \Longrightarrow du = dx) = \int \frac{du}{u^{4/5}} = 5u^{1/5} + c = 5(x-2)^{1/5} + c$$

Entonces:

$$= \lim_{b\to 2^-}\left(5(b-2)^{1/5} - 5\left(-1^{1/5}\right)\right) + \lim_{b\to 2^+}\left(5(1)^{1/5} - 5(b-2)^{1/5}\right)$$

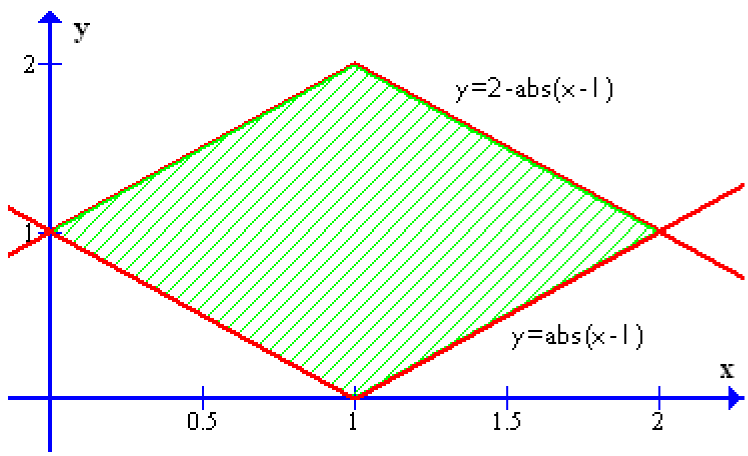
$$= -5\sqrt[5]{-1} + (5-0) = 5 - 5\sqrt[5]{-1}$$

Así pues, diremos que la integral converge a $5 - 5\sqrt[5]{-1}$.

6. *Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje X la región plana limitada por* $y = 2 - |x-1|$ e $y = |x-1|$.

<u>Solución</u>:

Graficamos la región:



Hallamos la intercepción:

$$2 - |x-1| = |x-1| \Longrightarrow (2-|x-1|)^2 = (x-1)^2 \Longrightarrow 4 - 4|x-1| + (x-1)^2 = (x-1)^2$$

$$\Longrightarrow 4 - 4|x-1| = 0 \Longrightarrow 1 = |x-1| \Longrightarrow 1 = (x-1)^2 \Longrightarrow 1 = x^2 - 2x + 1 \Longrightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Longrightarrow x(x-2) = 0 \Longrightarrow \quad x = 0, \qquad x = 2$$

Utilizamos el método de cascarones:

$$V(R) = 2\pi \int_0^2 x(2 - |x-1| - |x-1|)\, dx = 4\pi \int_0^2 x(1 - |x-1|)dx$$

Definimos el valor absoluto:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & si\ x \geq 1 \\ 1-x, & si\ x < 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$V(R) = 4\pi \int_0^1 x(1-(1-x))dx + 4\pi \int_1^2 x\big(1-(x-1)\big)dx$$

$$= 4\pi\left(\int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x)dx\right) = 4\pi\left(\frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right) = 4\pi\left(\frac{2}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1\right)$$

$$= 4\pi\left(\frac{2+12-8-3}{3}\right) = 4\pi$$